L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Révisions

Calcul Différentiel

Exercice 1. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y.$$

Exercice 2. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions du système suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Exercice 3. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| < 1.$$

Le Jacobien de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (y + f(x), x + f(y))$$

est-il inversible ?

Exercice 4. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x + y - z)(x + y + 2z).$$

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f.
2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 6. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x,y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux et globaux de $f(x,y) = x(x+1)^2 - y^2$.

Exercice 8. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f, g et h trois fonctions de $U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

On suppose que f et g sont différentiables en $a \in U$ et que $f(a) = h(a)$. Montrer que $d(h-f)(a) = 0$. En déduire que g est différentiable en a et calculer $dg(a)$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne et de sa norme euclidienne, $N(.) = \|.\|_2$.

1. Montrer que N est une application différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ croissante. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) = f(N(x))x$. Calculer la différentielle de F et montrer que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle DF(x).h, h\rangle \geqslant f(N(x))N(h)^2.$$

Suites et Séries de Fonctions

Exercice 10. La suite de fonctions $f_n(x) = x^{2n}\ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? uniformément ?

Exercice 11. La suite de fonctions $f_n(x) = nx^n\ln(x)$ converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? uniformément ?

Exercice 12. La suite de fonctions

$$f_n(x) = n^2x^{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{x^n}{2n+1}\right)$$

converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? uniformément ?

Exercice 13. Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que l'on n'a pas de convergence normale sur $[0,+\infty[$ mais sur $[a,+\infty[$, $a > 0$.
2. Calculer la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ et montrer que l'on n'a pas convergence uniforme ni sur $[0,+\infty[$ ni sur $]0,+\infty[$.

Exercice 15. La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge-t-elle simplement $[0,+\infty[$? Uniformément ?

Exercice 16. On pose $u_n(x) = x^{n+1}\ln(x)$ si $x \in [0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}u_n(x)$ ne converge pas uniformément.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n(x)$ converge uniformément.

Exercice 17.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Séries de Fourier

Exercice 18. Soit f une fonction T-périodique, continue, positive et non identiquement nulle. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(f) < \frac{a_0}{2}$.

Exercice 19. Soit f une fonction 2π-périodique localement intégrale. On définie la fonction g par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(2t)$. Montrer que g est π-périodique et calculer les coefficients $c_n(g)$ en fonction de ceux de f.

Exercice 20. Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que $G = \{T \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t+T) = f(t)\}$ muni de l'addition est un groupe.

Exercice 21. On définit D_N par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{inx}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 22. Soit $E = \left\{f\ :\ x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n| < +\infty\right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^1([0,1],\mathbb{C})$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.
2. Montrer que $\|f\|_E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ définit une norme sur E et que $\|f\|_{\mathrm{L}^1} \leqslant \|f\|_E$.

Exercice 23. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ prolongée en une fonction 2π-périodique.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 24. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^\pi \frac{1+\cos(x)}{4-2\cos(x)} \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 25. Soient f et $g \in \mathrm{L}^2([0,2\pi],\mathbb{C})$. Calculer les coefficients $c_n(fg)$ en fonction de ceux de f et de g.

Questions de cours

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathscr{C}^1$. Donner l'espace de départ et d'arrivée de l'application différentielle df.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les dérivées partielles pour qu'une fonction soit $\mathscr{C}^1$.
3. Pour deux fonctions f et g différentiables sur de bons ensembles, donner la formule de la différentielle de la composée : $d_x(f \circ g).h$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Exprimer la différentielle en fonction de la dérivée.
5. Donner le nombre de lignes et de colonnes de la Jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.
6. Pour quel type de fonction parle-t-on de gradient ?
7. Si la Hessienne est définie positive que dire de la nature du point critique ?
8. Pourquoi la Hessienne est-elle diagonalisable ?
9. Écrire la définition d'un minimum local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en a.
10. Écrire la définition d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).
11. Écrire la définition d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur un intervalle I (en terme d'epsilons...).
12. Donner les implications entre la convergence normale, absolue, simple, uniforme.
13. Écrire la définition des coefficients $a_n(f)$, pour f localement intégrable et T-périodique.
14. Donner les coefficients $c_n(f)$ en fonction de ceux de $a_n(f)$ et de $b_n(f)$.
15. Énoncer le théorème de projection dans un Hilbert.
16. Énoncer l'inégalité de Bessel.
17. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
18. Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Que vaut $\mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}^\perp$?
19. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
20. Énoncer le théorème de Fejér.

Le Pictionamaths

1. La nappe d'équation $z = (y - x)^2 + 3$
2. La nappe d'équation $z = x^2 + y^2 + 3$.
3. Une dérivée directionnelle
4. Une dérivée partielle
5. Un projecteur orthogonal
6. L'orthogonal à un vecteur
7. Une application coordonnée
8. Un minimum local
9. Un minimum global
10. Un point selle
11. Une suite de fonction convergeant simplement
12. Une suite de fonctions ne convergeant pas simplement
13. Une suite de fonction convergeant uniformément
14. Une fonction périodique
15. Un polynôme trigonométrique
16. Une fonction différant au moins en un point de sa série de Fourier